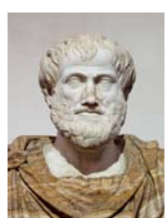
ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

1. ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Η Λογική είναι ένας από τους παλαιότερους κλάδους των μαθηματικών που αρχικά καλλιεργήθηκε από τους αρχαίους Έλληνες. Οι πρώτες σημαντικές πραγματείες σχετικά με τη λογική γράφτηκαν από τον Έλληνα φιλόσοφο Αριστοτέλη, ο οποίος εισήγαγε την έννοια του συλλογισμού που σήμερα είναι γνωστή σαν "Αριστοτελική Λογική". Ο Αριστοτέλης σαν ιδρυτής της Λογικής, δεν είναι ο πρώτος άνθρωπος που σκέφθηκε "λογικά", αλλά ο πρώτος που θεώρησε λογικά τη σκέψη και προσπάθησε να την κωδικοποιήσει, παρουσιάζοντας κανόνες για τον παραγωγικό συλλογισμό (deductive reasoning) που αποτέλεσαν μια βάση για τη μετέπειτα μελέτη κάθε τομέα γνώσης.

Ο Αριστοτέλης γεννήθηκε στα Στάγιρα της Χαλκιδικής το 384 π.Χ. Σε ηλικία 17 ετών πήγε στην Αθήνα και έγινε μέλος της Ακαδημίας του Πλάτωνα όπου για 20 χρόνια παρακολούθησε τις διαλέξεις του Πλάτωνα που ήταν ο δάσκαλός του. Αργότερα ο Αριστοτέλης παρουσίασε δικές του διαλέξεις σχετικά με τη ρητορική και μετά από ανάθεση του βασιλιά της Μακεδονίας Φιλίππου ανέλαβε τη μόρφωση του γιού του Αλέξανδρου για πέντε χρόνια. Μετά το θάνατο του βασιλιά Φιλίππου, ο Αριστοτέλης επέστρεψε στην Αθήνα όπου ίδρυσε τη δική του σχολή που την ονόμασε "Λύκειο". Επειδή ο Αριστοτέλης συνήθιζε να περπατάει καθώς συζητούσε φιλοσοφικά θέματα, οι οπαδοί του ονομάστηκαν "περιπατητές". Ο Αριστοτέλης έγραψε τρία είδη έργων: (1) για το λαϊκό ακροατήριο, (2) αποδόσεις επιστημονικών γεγονότων και (3) συστηματικές πραγματείες. Οι τελευταίες είναι έργα για τη λογική, τη φιλοσοφία, τη ψυχολογία, τη φυσική και τη φυσική ιστορία. Ο Αριστοτέλης πέθανε το 322 π.Χ. Τα έργα του μεταφέρθηκαν αργότερα στη Ρώμη όπου μελετήθηκαν από λογίους και εκδόθηκαν σε νέες εκδόσεις έτσι ώστε διατηρήθηκαν μέχρι σήμερα.



Εικόνα 1. Αριστοτέλης (384-322 π.Χ.)

Ο Αριστοτέλης δεν χρησιμοποίησε τον όρο "Λογική" (ο οποίος εισήχθη από τους Στωικούς), ενώ ο τίτλος "Όργανον" με τον οποίο συγκεντρώθηκαν οι λογικές μελέτες του, επινοήθηκε από τον Ανδρόνικο πέντε αιώνες μετά τη συγγραφή τους, προκειμένου να προσδοθεί στην "Αριστοτελική Λογική" μια συστηματική διάρθρωση. Η σειρά κατάταξης των έργων έγινε έτσι ώστε να εκφράζουν, κατά τον Ανδρόνικο, μία συστηματική διδακτική πορεία από τα απλούστερα προς τα πλέον σύνθετα. Η σειρά περιλαμβάνει τα εξής έργα: (α) Κατηγορίαι (λέξεις), (β)

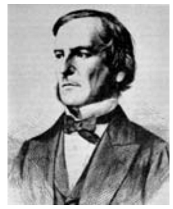
Περί Ερμηνείας (προτάσεις), (γ) Αναλυτικά Πρότερα (συλλογισμός), (δ) Αναλυτικά Ύστερα (αποδεικτικός συλλογισμός), (ε) Τοπικά και (στ) Περί Σοφιστικών Ελέγχων (διαλεκτικός συλλογισμός).
Το 17^{ο} αιώνα ο Γερμανός φιλόσοφος και μαθηματικός Gottfried Wilhelm Leibniz συνέλαβε την ιδέα της χρήσης συμβόλων στη διαδικασία του παραγωγικού συλλογισμού με τρόπο ανάλογο με εκείνο της αλγεβρικής σημειολογίας στην τυποποίηση της διαδικασίας συλλογισμού με αριθμητικές σχέσεις. Η πραγματική όμως ανάπτυξη της Λογικής σε σχέση με τα σύγχρονα Μαθηματικά άρχισε να γίνεται στα μέσα του 19^{ου} αιώνα, όταν η ιδέα του Leibniz υλοποιήθηκε από τους Άγγλους Μαθηματικού Augustus De Morgan και George Boole.

Εικόνα 2. Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716)

Ο De Morgan γεννήθηκε το 1806 στην Ινδία και σπούδασε μαθηματικά στο Trinity College του Cambridge απ' όπου απεφοίτησε το 1827. Το 1838 παρουσίασε για πρώτη φορά μια σημαντική τεχνική αποδείξεων που είναι γνωστή σαν μαθηματική επαγωγής, ενώ στη δεκαετία 1840 ο De Morgan συνέβαλε σημαντικά στην ανάπτυξη της συμβολικής λογικής. Καθιέρωσε συμβολισμούς για την απόδειξη προτασιακών ισοδυναμιών, όπως είναι οι κανόνες που φέρουν το όνομά του.

Εικόνα 3. Augustus De Morgan (1806-1871)

Ο Boole γεννήθηκε το 1815 στο Lincoln της Αγγλίας. Επειδή η οικογένειά του ήταν σε δύσκολη οικονομική κατάσταση ο Boole αναγκάστηκε να εργάζεται κατά τη διάρκεια των σπουδών του για να τη βοηθήσει. Παρ' όλες τις δυσκολίες έγινε ένας από τους σπουδαιότερους μαθηματικούς του 19^{ου} αιώνα. Το 1848 ο Boole δημοσίευσε το πρώτο έργο του στη συμβολική λογική που είχε τίτλο "The Mathematical Analysis of Logic". Το 1849 διορίστηκε καθηγητής μαθηματικών στο Queen's College του Πανεπιστημίου Cork της Ιρλανδίας και το 1854 δημοσίευσε το πιο σημαντικό του έργο, "An Investigation of the Laws of Thought", όπου περιγράφεται αυτό που είναι σήμερα γνωστό σαν Άλγεβρα Boole.



Εικόνα 4. George Boole (1815-1864)

Οι κανόνες της Λογικής προσδιορίζουν τη σημασία των μαθηματικών δηλώσεων (mathematical statements) σε αληθείς ή ψευδείς και διαχωρίζουν τα μαθηματικά επιχειρήματα (mathematical arguments) σε έγκυρα ή άκυρα. Η Λογική όμως εκτός από τη συμβολή της στην κατανόηση της μαθηματικής σκέψης, έχει πολλές εφαρμογές στην επιστήμη των υπολογιστών, όπως είναι η κατασκευή προγραμμάτων (software) και ψηφιακών κυκλωμάτων για υπολογιστές. Μία άλλη σημαντική εφαρμογή της Λογικής είναι η επαλήθευση της ορθότητας των προγραμμάτων και ο σχεδιασμός βάσεων δεδομένων.

2. ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Αν και η συστηματική διερεύνηση των προτάσεων είναι αντικείμενο της γλωσσολογίας και όχι των μαθηματικών, εντούτοις στην παράγραφο αυτή θα προσεγγίσουμε τις προτάσεις από την πλευρά της μαθηματικής λογικής. Οι περισσότεροι από τους ορισμούς της μαθηματικής λογικής έχουν διατυπωθεί με τέτοιο τρόπο ώστε να συμφωνούν (όσο είναι αυτό δυνατό) με την φυσική και διαισθητική λογική που χρησιμοποιούμε στην καθημερινή μας ζωή.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ 1</u> <u>Πρόταση</u> (proposition) είναι μία γραπτή ή προφορική δηλωτική φράση που είναι είτε αληθής, είτε ψευδής, αλλά όχι ταυτοχρόνως και τα δύο.

Μια απλή πρόταση περιλαμβάνει συνδυασμό αναφορικών χαρακτηρισμών που τεκμηριώνουν τη δηλωτική φράση.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1</u> Στην ελληνική γλώσσα οι δηλωτικές φράσεις: (α) Σήμερα είναι Τρίτη και (β) Ο καιρός είναι καλός, είναι προτάσεις. Οι προτάσεις αυτές λέγονται <u>απλές</u> (simple). Φράσεις που δεν είναι προτάσεις έχουν τη μορφή: π.χ. (γ) Πως σε λένε; (δ) Μη μιλάς και (ε) $x+3=6$. Οι φράσεις (γ) και (δ) δεν είναι προτάσεις διότι δεν είναι δηλωτικές φράσεις. Η φράση (ε) δεν είναι πρόταση διότι η μεταβλητή x δεν έχει συγκεκριμένη τιμή έτσι ώστε η (ε) να μπορεί να χαρακτηριστεί αληθής ή ψευδής.

Η τιμή αληθείας μιας πρότασης μπορεί να είναι είτε "Αληθής" οπότε συμβολίζεται με T (True), είτε "Ψευδής" οπότε συμβολίζεται με F (False). Είναι επιθυμητό να μπορούμε να διαπιστώνουμε κάθε φορά ποια περίπτωση είναι σε ισχύ.

Τις προτάσεις τις συμβολίζουμε με συνηθισμένα γράμματα του αγγλικού αλφαβήτου $p,q,r,s,\ldots$. Ο κλάδος της Λογικής που ασχολείται με τις προτάσεις λέγεται <u>προτασιακή λογική</u> (propositional logic) ή <u>προτασιακός λογισμός</u> (propositional calculus) και αναπτύχθηκε αρχικά από τον Αριστοτέλη πριν από 2300 χρόνια.
Η σύνδεση δύο ή περισσοτέρων απλών προτάσεων λέγεται <u>σύνθετη πρόταση</u> (compound proposition), π.χ. Σήμερα είναι Τρίτη και ο καιρός είναι καλός. Η τιμή αληθείας μιας σύνθετης πρότασης μπορεί εύκολα να υπολογιστεί από την τιμή αληθείας των επιμέρους απλών προτάσεων που την απαρτίζουν.
Κατά την μελέτη των σύνθετων προτάσεων, θα επικεντρωθούμε σε δύο στόχους:

1. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να <u>συνδυαστούν</u> οι απλές προτάσεις;
2. Πως προσδιορίζεται η <u>τιμή αληθείας</u> (truth value) μιας σύνθετης πρότασης με τη βοήθεια των τιμών αληθείας των συνιστωσών προτάσεων;

Τα θέματα αυτά μελετήθηκαν αρχικά από τον Άγγλο μαθηματικό George Boole το 1854 στο βιβλίο του "An Investigation of the Laws of Thought".

Στις συνήθεις μαθηματικές παραστάσεις υπάρχουν τριών ειδών σύμβολα: οι <u>σταθερές</u>, οι <u>μεταβλητές</u> και τα <u>βοηθητικά σύμβολα</u>. Για παράδειγμα στη μαθηματική παράσταση $(x+y)^2$ το σύμβολο + και ο εκθέτης 2 είναι σταθερές, τα γράμματα x και y είναι μεταβλητές, ενώ οι παρενθέσεις είναι βοηθητικά σύμβολα. Οι σταθερές είναι σύμβολα με συγκεκριμένη σημασία κατά περίπτωση. Έτσι στην παράσταση $(x+y)^2$ το σύμβολο + σημαίνει ότι πρέπει να προσθέσουμε τους αριθμούς x και y, ενώ ο εκθέτης 2 σημαίνει ότι πρέπει να πολλαπλασιάσουμε το $(x+y)$ με τον εαυτό του. Στην παράσταση $(x+y)^2$ τα γράμματα x και y εκφράζουν απροσδιόριστους αριθμούς. Τέλος οι παρενθέσεις παίζουν το ρόλο των σημείων στίξης, καθώς αν παραλείψουμε τις παρενθέσεις έχουμε την παράσταση $x+y^2$, που είναι μια τελείως διαφορετική έκφραση. Σε ότι παρακάτω ακολουθεί, οι σταθερές θα εκφράζουν τους συνδέσμους που συνδέουν απλές προτάσεις για το σχηματισμό σύνθετων προτάσεων.

3. ΛΟΓΙΚΟΙ ΤΕΛΕΣΤΕΣ

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε πώς συνδυάζοντας τις απλές προτάσεις με κατάλληλους λογικούς συνδέσμους μπορούμε να διατυπώσουμε σύνθετες προτάσεις. Κατά συνέπεια η τιμή αληθείας μιας σύνθετης πρότασης εξαρτάται από την τιμή αληθείας των προτάσεων που την απαρτίζουν.
Ο <u>πίνακας αληθείας</u> (truth table) είναι ένας πίνακας που περιγράφει τη σχέση μεταξύ των τιμών αληθείας των προτάσεων. Οι πίνακες αληθείας είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι για τον προσδιορισμό των τιμών αληθείας μιας σύνθετης πρότασης με τη βοήθεια των τιμών αληθείας των επιμέρους απλών προτάσεων.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 Αν p είναι μία πρόταση, τότε η "Όχι p" είναι μια νέα πρόταση που λέγεται άρνηση (negation) της p και συμβολίζεται με $\neg p$ ή NOT p.

Η $\neg p$ είναι αληθής όταν η p είναι ψευδής και αντίστροφα. Δίνεται παρακάτω ο πίνακας αληθείας της άρνησης.

Πίνακας 1. Πίνακας αληθείας της άρνησης

p	$\neg p$
T	F
F	T

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Θεωρούμε την πρόταση p: Σήμερα είναι Τρίτη. Η άρνηση της p είναι η πρόταση $\neg p$: Σήμερα δεν είναι Τρίτη.

Η άρνηση μιας πρότασης μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι το αποτέλεσμα της επίδρασης του τελεστή $\neg$ που λέγεται τελεστής άρνησης πάνω στην αρχική πρόταση. Στη συνέχεια περιγράφονται οι λογικοί τελεστές με τους οποίους κατασκευάζονται σύνθετες προτάσεις από δύο ή περισσότερες απλές προτάσεις.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3 Αν p, q είναι δύο προτάσεις, τότε η πρόταση "p και q" λέγεται σύζευξη (conjunction) των p, q και συμβολίζεται με $p \wedge q$ ή p AND q.

Η $p \wedge q$ είναι αληθής όταν και οι δύο p, q είναι αληθείς, ενώ διαφορετικά είναι ψευδής. Δίνεται παρακάτω ο πίνακας αληθείας της σύζευξης. Αξίζει να σημειωθεί ότι τώρα υπάρχουν 4 γραμμές στον πίνακα αυτό, όσοι είναι οι συνδυασμοί των τιμών αληθείας των προτάσεων p, q.

Πίνακας 2. Πίνακας αληθείας της σύζευξης

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Θεωρούμε τις απλές προτάσεις p: Σήμερα είναι Τρίτη και q: Ο καιρός είναι καλός. Η σύζευξη των p, q είναι η πρόταση $p \wedge q$: Σήμερα είναι Τρίτη και ο καιρός είναι καλός. Η $p \wedge q$ είναι αληθής τις Τρίτες για τις οποίες δεν βρέχει, ενώ είναι ψευδής όλες τις άλλες μέρες που δεν είναι Τρίτη και τις Τρίτες που βρέχει.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4 Αν p, q είναι δύο προτάσεις, τότε η πρόταση "p ή q ή αμφότερες" λέγεται διάζευξη (disjunction) των p, q και συμβολίζεται με $p \vee q$, ή p OR q.

Η $p \vee q$ είναι ψευδής μόνο όταν και οι δύο p, q είναι ψευδείς, ενώ διαφορετικά είναι αληθής. Δίνεται παρακάτω ο πίνακας αληθείας της διάζευξης.

Πίνακας 3. Πίνακας αληθείας της διάζευξης

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Θεωρούμε τις απλές προτάσεις p: Σήμερα είναι Τρίτη και q: Ο καιρός είναι καλός. Η διάζευξη των p, q είναι η πρόταση $p \vee q$: Σήμερα είναι Τρίτη ή ο καιρός είναι καλός. Η $p \vee q$ είναι αληθής τις Τρίτες ή τις ημέρες που δεν βρέχει, ενώ είναι ψευδής όταν δεν είναι Τρίτη και βρέχει.

Εύκολα γίνεται αντιληπτό ότι η διάζευξη είναι πιο ήπια δήλωση σε σχέση με τη σύζευξη. Επίσης θα πρέπει να σημειωθεί ότι η διάζευξη στην Ελληνική γλώσσα έχει διπλή σημασιολογία, η οποία γίνεται αντιληπτή από τα συμφραζόμενα. Η μία σημασιολογία είναι αυτή που χρησιμοποιήθηκε παραπάνω και λέγεται εγκλειστική (inclusive). Για παράδειγμα η πρόταση $p \vee q$: Σήμερα είναι Τρίτη ή ο καιρός είναι καλός, δεν αποκλείει την περίπτωση να είναι Τρίτη και ο καιρός να είναι καλός. Η άλλη σημασιολογία της διάζευξης είναι η αποκλειστική.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5 Αν p, q είναι δύο προτάσεις, τότε η πρόταση "p ή q αλλά όχι και τα δύο" λέγεται αποκλειστική διάζευξη (exclusive disjunction) των p, q και συμβολίζεται με $p \oplus q$ ή p XOR q.

Η $p \oplus q$ είναι αληθής όταν ακριβώς μία από τις p, q είναι αληθής, διαφορετικά είναι ψευδής. Δίνεται παρακάτω ο πίνακας αληθείας της αποκλειστικής διάζευξης.

Πίνακας 4. Πίνακας αληθείας της αποκλειστικής διάζευξης

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5</u> Θεωρούμε τις απλές προτάσεις p: Αύριο θα πάω στη Θεσσαλονίκη και q: Αύριο θα πάω στην Καβάλα. Η αποκλειστική διάζευξη των p, q είναι η σύνθετη πρόταση $p \oplus q$: Αύριο θα πάω στη Θεσσαλονίκη <u>ή</u> στην Καβάλα. Είναι προφανές από τα συμφραζόμενα ότι ένας μόνο τόπος προορισμού μπορεί να επιλεγεί, ότι δηλαδή η διάζευξη είναι αποκλειστική, αφού κάποιος δεν μπορεί να βρεθεί συγχρόνως και στη Θεσσαλονίκη και στην Καβάλα.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6</u> Να βρεθεί ο πίνακας αληθείας της πρότασης $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$.

Πίνακας 5. Πίνακας αληθείας παραδείγματος 6

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$
T	T	T	T	F	F
T	F	T	F	T	T
F	T	T	F	T	T
F	F	F	F	T	F

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας αληθείας είναι ίδιος με εκείνο της αποκλειστικής διάζευξης $p \oplus q$. Αυτό συμβαίνει διότι η $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$ είναι ένας διαφορετικός τρόπος έκφρασης της “ p ή q αλλά όχι και τα δύο”.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7</u> Να βρεθεί ο πίνακας αληθείας της πρότασης $p \vee \neg q$.

Πίνακας 6. Πίνακας αληθείας παραδείγματος 7

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$
T	T	F	T
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8</u> Να βρεθεί ο πίνακας αληθείας της πρότασης $(p \vee \neg q) \wedge \neg p$.

Πίνακας 7. Πίνακας αληθείας παραδείγματος 8

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$(p \vee \neg q) \wedge \neg p$
T	T	F	F	T	F
T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9 Να βρεθεί ο πίνακας αληθείας της πρότασης $(p \wedge q) \vee \neg r$.
Εδώ υπάρχουν οκτώ λογικά δυνατοί συνδυασμοί των τιμών αληθείας για τις p, q και r.

Πίνακας 7. Πίνακας αληθείας παραδείγματος 8

p	q	r	$\neg r$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee \neg r)$
T	T	T	F	T	T
T	T	F	T	T	T
T	F	T	F	F	F
T	F	F	T	F	T
F	T	T	F	F	F
F	T	F	T	F	T
F	F	T	F	F	F
F	F	F	T	F	T

Πολλές φορές αντί για μια απ’ ευθείας δήλωση, επιθυμούμε να κάνουμε μια δήλωση κάτω από συνθήκες (conditions). Για παράδειγμα, “Αν ο καιρός είναι καλός, τότε θα πάω βόλτα”. “Αν είσαι καλό παιδί, τότε θα σε πάρω ένα δώρο”. Κάθε μια από τις δηλώσεις αυτές είναι της μορφής “αν p, τότε q”, που λέγεται υποθετική ή υπό συνθήκη πρόταση.

ΟΡΙΣΜΟΣ 6 Αν p, q δύο προτάσεις, τότε η “Αν p, τότε q” λέγεται υποθετική (conditional) πρόταση της q ως προς την p και συμβολίζεται με $p \to q$.

Στην υποθετική πρόταση, η p λέγεται προϋπόθεση (premise) ή προηγούμενο (antecedent), ενώ η q λέγεται συμπέρασμα (conclusion) ή επακόλουθο (consequent). Η $p \to q$ είναι ψευδής μόνο όταν η p είναι αληθής και η q είναι ψευδής, ενώ διαφορετικά είναι αληθής. Δίνεται παρακάτω ο πίνακας αληθείας της υποθετικής πρότασης.

Πίνακας 8. Πίνακας αληθείας της υποθετικής

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10</u> Θεωρούμε τις απλές προτάσεις p: Αν ο καιρός είναι καλός και q: Θα πάω βόλτα. Η υποθετική πρόταση των p, q είναι η $p \to q$: Αν ο καιρός είναι καλός, τότε θα πάω βόλτα. Η "$p \to q$" είναι ψευδής μόνο στην περίπτωση που η p είναι αληθής και η q είναι ψευδής. Είναι αληθής όταν αμφότερες οι p, q είναι αληθείς και επίσης όταν η p είναι ψευδής (ανεξάρτητα από την τιμή αληθείας της q).

Επειδή η υποθετική πρόταση είναι πολύ σημαντική στα μαθηματικά, εκτός από τον ορισμό 6, υπάρχει στη βιβλιογραφία και μια ποικιλία ισοδύναμων ορισμών μερικοί από τους οποίους είναι:

(α)	"Η p μόνο αν η q"	(β)	"Αν η p, τότε η q"
(γ)	"Η q είναι αναγκαία για την p"	(δ)	"Η p είναι ικανή για την q"
(ε)	"q όταν p"	(στ)	"Η q κάθε φορά που η p"

Επειδή δεν είναι εύκολα κατανοητό ότι η δήλωση (α) είναι ισοδύναμη με την (β), θα πρέπει να τονιστεί ότι η δήλωση (α) σημαίνει ότι η p δεν μπορεί να είναι αληθής όταν η q δεν είναι αληθής. Δηλαδή η δήλωση (α) είναι ψευδής όταν η p είναι αληθής αλλά η q είναι ψευδής. Όταν η p είναι ψευδής, τότε η q μπορεί να είναι είτε αληθής είτε ψευδής, επειδή η δήλωση (α) δεν αναφέρει τίποτα για την τιμή αληθείας της q.
Ένα συχνό λάθος που συμβαίνει είναι να πιστεύουμε ότι η δήλωση "Η q μόνο αν η p" είναι ισοδύναμη με την "$p \to q$", διότι οι δηλώσεις αυτές δεν έχουν τον ίδιο πίνακα αληθείας. Ένα χρήσιμο παράδειγμα για την κατανόηση της τιμής αληθείας της υποθετικής πρότασης είναι το παρακάτω.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11</u> Ένας πατέρας κάνει στο παιδί του την παρακάτω δήλωση "Αν μπεις στο πανεπιστήμιο, θα σου αγοράσω αυτοκίνητο".
Αν το παιδί μπει στο πανεπιστήμιο, θα περιμένει την αγορά του αυτοκινήτου. Αν το παιδί δεν μπει στο πανεπιστήμιο, δεν θα ελπίζει (και δεν θα έχει την απαίτηση) να αγοραστεί το αυτοκίνητο. Μόνο αν το παιδί μπει στο πανεπιστήμιο και δεν αγοραστεί το αυτοκίνητο, τότε μπορεί να πει το παιδί ότι ο πατέρας δεν κράτησε την υπόσχεσή του. Έτσι έχουμε την περίπτωση ότι p είναι αληθής και q είναι ψευδής, οπότε η $p \to q$ είναι ψευδής.

Ο τρόπος που ορίστηκε η υποθετική πρόταση στον ορισμό 6 είναι γενικότερος από τη σημασιολογία της υποθετικής πρότασης στη φυσική γλώσσα. Για παράδειγμα η πρόταση "Αν ο καιρός είναι καλός, τότε θα πάω βόλτα", χρησιμοποιείται στη φυσική γλώσσα επειδή υπάρχει σχέση μεταξύ υπόθεσης και συμπεράσματος. Η πρόταση αυτή θεωρείται αληθής, εκτός και αν ο καιρός είναι καλός και δεν πάω βόλτα. Η υποθετική πρόταση "Αν σήμερα είναι Τρίτη, τότε 2+2 = 4", είναι αληθής επειδή το συμπέρασμά της είναι αληθές (η τιμή αληθείας της υπόθεσης δεν έχει σημασία). Επίσης η πρόταση "Αν σήμερα είναι Τρίτη, τότε 2+2 = 5", είναι αληθής όλες τις ημέρες εκτός από τις Τρίτες, έστω και αν το συμπέρασμα είναι ψευδές. Στη φυσική γλώσσα οι δύο τελευταίες υποθετικές προτάσεις θεωρούνται ασυναρτησίες, επειδή δεν υπάρχει σχέση μεταξύ της υπόθεσης και το συμπεράσματος. Στα μαθηματικά όμως, αυτές οι υποθετικές προτάσεις είναι αποδεκτές, επειδή η μαθηματική έννοια της υποθετικής πρότασης είναι ανεξάρτητη από σχέση αιτίου-αποτελέσματος μεταξύ υπόθεσης και συμπεράσματος.

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1</u> Οι εντολή "αν – τότε" (if-then) που χρησιμοποιείται στις γλώσσες προγραμματισμού έχει διαφορετική σύνταξη απ' ότι στη μαθηματική λογική. Στην εντολή "αν (if) p, τότε (then) q", η p είναι πρόταση και η q είναι τμήμα προγράμματος που πρόκειται να εκτελεστεί. Όταν η ροή του προγράμματος συναντά την εντολή αυτή, τότε εκτελείται η q όταν η p είναι αληθής. Δεν εκτελείται η q όταν η p είναι ψευδής.

Άμεσα συνδεδεμένη με την υποθετική πρότασή είναι η αμφίδρομη υποθετική πρόταση "p αν και μόνο αν q".

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ 7</u> Αν p, q είναι δύο προτάσεις, τότε η πρόταση "p αν και μόνο αν q" λέγεται <u>αμφίδρομη υποθετική</u> (biconditional) των p, q και συμβολίζεται με $p \leftrightarrow q$.

Η $p \leftrightarrow q$ είναι αληθής όταν οι p και q έχουν την ίδια τιμή αληθείας, ενώ διαφορετικά είναι ψευδής. Δίνεται παρακάτω ο πίνακας αληθείας της αμφίδρομης υποθετικής πρότασης.

Πίνακας 9. Πίνακας αληθείας της αμφίδρομης υποθετικής

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 12</u> Θεωρούμε τις απλές προτάσεις p: Θα μάθεις το μάθημα και q: Διαβάζεις συστηματικά. Η αμφίδρομη υποθετική των p, q είναι η πρόταση $p \leftrightarrow q$: Θα μάθεις το μάθημα <u>αν και μόνο αν</u> διαβάζεις συστηματικά. Η $p \leftrightarrow q$ είναι αληθής όταν οι p και q είναι αμφότερες είτε αληθείς είτε ψευδής. Δηλαδή, είτε "Διαβάζεις συστηματικά και μαθαίνεις το μάθημα", είτε "Δεν διαβάζεις συστηματικά και δεν μαθαίνεις το μάθημα". Η $p \leftrightarrow q$ είναι ψευδής όταν οι p και q έχουν αντίθετες τιμές αληθείας, δηλαδή, "Δεν διαβάζεις συστηματικά αλλά

μαθαίνεις το μάθημα" (όταν είσαι έξυπνος), είτε "Διαβάζεις συστηματικά αλλά δεν μαθαίνεις το μάθημα" (όταν δεν είσαι έξυπνος).

Η έκφραση "αν και μόνο αν" σπάνια χρησιμοποιείται στην καθημερινή γλώσσα, αφού η αμφίδρομη υποθετική πρόταση εκφράζεται με τη χρήση του "αν, τότε" ή "μόνο αν". Για παράδειγμα "Αν διαβάζεις συστηματικά, τότε θα μάθεις το μάθημα", ή "Θα μάθεις το μάθημα μόνο αν διαβάζεις συστηματικά". Λόγω της ανακρίβειας στην καθομιλουμένη γλώσσα και επειδή στα μαθηματικά η ακρίβεια είναι σημαντική, θα πρέπει να δηλώνεται ρητά αν μία υποθετική πρόταση εννοείται ότι περιλαμβάνει και την αντίστροφή της.

Η υποθετική πρόταση διαφέρει από την αμφίδρομη υποθετική αλλά και από τις σύζευξη και διάζευξη στο ότι δεν είναι συμμετρική ως προς τις προτάσεις που την συνθέτουν. Δηλαδή η $p \wedge q$ είναι ισοδύναμη με την $q \wedge p$, η $p \vee q$ είναι ισοδύναμη με την $q \vee p$ και η $p \leftrightarrow q$ είναι ισοδύναμη με την $q \leftrightarrow p$. Εντούτοις η $p \to q$ δεν είναι ισοδύναμη με την $q \to p$. Συγκεκριμένα η $q \to p$ ονομάζεται <u>αντίστροφη</u> (converse) της $p \to q$.
Υπάρχουν ακόμα δύο υποθετικές προτάσεις που σχετίζονται με την $p \to q$, επειδή μπορούν να προκύψουν από αυτή και είναι η $\neg p \to \neg q$ που ονομάζεται <u>αντίθετη</u> (inverse) της $p \to q$ και η $\neg q \to \neg p$ που ονομάζεται <u>αντιθετο αντίστροφη</u> (contrapositive) της $p \to q$, η οποία συχνά είναι πολύ χρήσιμη.
Δίνεται παρακάτω ο πίνακας αληθείας των τεσσάρων υποθετικών προτάσεων που προκύπτουν από τις p και q.

Πίνακας 10. Πίνακας αληθείας των τεσσάρων υποθετικών προτάσεων

		Υποθετική	Αντίστροφη			Αντίθετη	Αντιθετοαντίστροφη
p	q	$p \to q$	$q \to p$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \to \neg q$	$\neg q \to \neg p$
T	T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T

Παρατηρούμε ότι η αντιθετοαντίστροφη $\neg q \to \neg p$ έχει τον ίδιο πίνακα αληθείας με την $p \to q$, ενώ δεν συμβαίνει το ίδιο ούτε με την αντίστροφη $q \to p$, ούτε η αντίθετη $\neg p \to \neg q$.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ 8</u> Όταν δύο σύνθετες προτάσεις έχουν ίδιους πίνακες αληθείας, λέγονται <u>ισοδύναμες</u>.
Συνεπώς από τον πίνακα 10 προκύπτει ότι η αντιθετοαντίστροφη και η υποθετική είναι προτάσεις ισοδύναμες. Ισοδύναμες επίσης προτάσεις είναι η αντίστροφη και η αντίθετη μιας υποθετικής.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13 Να διατυπωθούν η αντιθετοαντίστροφη, η αντίστροφη και η αντίθετη πρόταση της υποθετική πρότασης "Αν ο καιρός είναι καλός, τότε πάω βόλτα".
Η αντιθετοαντίστροφη είναι "Αν δεν πάω βόλτα, τότε ο καιρός δεν είναι καλός". Η αντίστροφη είναι "Αν πάω βόλτα, τότε ο καιρός είναι καλός". Η αντίθετη είναι "Αν ο καιρός δεν είναι καλός, τότε δεν πάω βόλτα". Μόνο η αντιθετοαντίστροφη είναι ισοδύναμη με την αρχική πρόταση.

Η φράσεις αναγκαία συνθήκη και ικανή συνθήκη ορίζονται στη λογική όπως και στην τυπική γλώσσα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 9 Αν p και q είναι δύο προτάσεις τότε:

(α) "Η p είναι ικανή συνθήκη για την q" σημαίνει ότι "αν p τότε q".

(β) "Η p είναι αναγκαία συνθήκη για την q" σημαίνει ότι "αν όχι p τότε όχι q".

Με άλλα λόγια η πρόταση, "Η p είναι ικανή συνθήκη για την q" σημαίνει ότι "η αλήθεια της p είναι ικανή να εγγυηθεί την αλήθεια της q". Ενώ η πρόταση, "Η p είναι αναγκαία συνθήκη για την q" σημαίνει ότι "Αν η p δεν ισχύει, τότε ούτε η q μπορεί να ισχύει".

Τέλος, λόγω της ισοδυναμίας ανάμεσα σε μια υποθετική πρόταση και την αντιθετοαντιστροφή της προκύπτει ότι η πρόταση, "Η p είναι αναγκαία συνθήκη για την q", σημαίνει επίσης ότι, "Αν q, τότε p". Έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η πρόταση "Η p είναι αναγκαία και ικανή συνθήκη για την q" σημαίνει ότι, "p αν και μόνο αν q".

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 14 Θεωρούμε την πρόταση, "Αν ο Γιάννης έχει δίπλωμα οδήγησης, τότε είναι τουλάχιστον 18 ετών".
Η αλήθεια της πρότασης p: "Ο Γιάννης έχει δίπλωμα οδήγησης" είναι ικανή να εξασφαλίσει την αλήθεια της πρότασης q: "Ο Γιάννης είναι τουλάχιστον 18 ετών". Επίσης η πρόταση q: "Ο Γιάννης είναι τουλάχιστον 18 ετών" είναι αναγκαία για να είναι αληθής η πρόταση p: "Ο Γιάννης έχει δίπλωμα οδήγησης", διότι αν ο Γιάννης ήταν μικρότερος από 18 ετών, τότε δεν θα είχε δίπλωμα οδήγησης.

Εκτός από τις παραπάνω σύνθετες προτάσεις που προέκυψαν με τη χρήση των λογικών συνδέσμων, μπορούν επίσης να κατασκευαστούν και πιο πολύπλοκες σύνθετες προτάσεις με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που κατασκευάζονται οι αλγεβρικές παραστάσεις με τη χρήση των αριθμητικών πράξεων. Για να καθορίσουμε τη σειρά με την οποία εφαρμόζονται οι σύνδεσμοι χρησιμοποιούμε παρενθέσεις. Σε περίπτωση που δεν υπάρχουν παρενθέσεις τότε ισχύουν οι εξής προτεραιότητες. Ο τελεστής της άρνησης εφαρμόζεται πριν από όλους τους άλλους λογικούς τελεστές. Έτσι η πρόταση $\neg p \wedge q$ σημαίνει $(\neg p) \wedge q$ και όχι $\neg(p \wedge q)$. Επίσης ο τελεστής σύζευξης έχει προτεραιότητα έναντι του τελεστή διάζευξης, έτσι ώστε η πρόταση $p \wedge q \vee r$ σημαίνει $(p \wedge q) \vee r$ και όχι $p \wedge (q \vee r)$. Τέλος ο υποθετικός και ο αμφίδρομος υποθετικός τελεστής έχουν μικρότερη προτεραιότητα έναντι της σύζευξης και της διάζευξης, έτσι ώστε η πρόταση $p \vee q \rightarrow r$ σημαίνει $(p \vee q) \rightarrow r$. Στον πίνακα που ακολουθεί δίνονται οι προτεραιότητες των λογικών τελεστών που γνωρίσαμε.

Πίνακας 11. Προτεραιότητα λογικών τελεστών

Τελεστής	Προτεραιότητα
$\neg$	1
$\wedge$	2
$\vee$	3
$\rightarrow$	4
$\leftrightarrow$	5

4. ΛΟΓΙΚΕΣ ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΕΣ

Πολλές στην καθομιλούμενη γλώσσα χρησιμοποιούμε μια πρόταση στην οποία δίνουμε διαφορετική σημασία ανάλογα με την περίπτωση χρήσης της. Συνεπώς θα ήταν χρήσιμο να μπορούμε να ενσωματώσουμε τη δυνατότητα αυτή και στη μαθηματική λογική. Για το σκοπό αυτό θα πρέπει κάθε πρόταση να είναι συνδεδεμένη με ένα σύνολο λογικών δυνατοτήτων (logical possibilities) που προσδιορίζονται προκαταβολικά και είναι απαραίτητες προκειμένου η πρότασή μας να έχει νόημα. Στην περίπτωση που έχουμε μια σύνθετη πρόταση αποτελούμενη από επιμέρους απλές προτάσεις, θα πρέπει οι τελευταίες να αναφέρονται στο ίδιο ακριβώς σύνολο λογικών δυνατοτήτων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 15 Υποθέτουμε ότι έχουμε δύο κουτιά όπου το $1^{ο}$ περιέχει δύο μαύρες μπάλες και μία άσπρη, ενώ το $2^{ο}$ μία μαύρη και δύο άσπρες μπάλες και κάνουμε το εξής πείραμα. Αρχικά επιλέγουμε ένα κουτί στην τύχη και στη συνέχεια παίρνουμε δύο μπάλες από αυτό. Στους πίνακες που ακολουθούν δίνονται τα σύνολα των λογικών δυνατοτήτων του πειράματος με δύο διαφορετικούς τρόπους αντιμετώπισης του προβλήματος. Στον πίνακα 12 δίνεται το σύνολο των λογικών δυνατοτήτων αναφορικά μόνο με το χρώμα κάθε μπάλας.

Πίνακας 12. Πίνακας λογικών δυνατοτήτων της συνοπτικής ανάλυσης

Δυνατότητα	Κουτί	$1^{η}$ μπάλα	$2^{η}$ μπάλα
1	1	Μαύρη	Μαύρη
2	1	Μαύρη	Άσπρη
3	1	Άσπρη	Μαύρη
4	2	Μαύρη	Άσπρη
5	2	Άσπρη	Μαύρη
6	2	Άσπρη	Άσπρη

Στον πίνακα 13 δίνεται μια πιο λεπτομερής ανάλυση όπου το σύνολο των λογικών δυνατοτήτων περιγράφεται αναφορικά με το χρώμα και το μέγεθος κάθε μπάλας, στην περίπτωση που δύο μπάλες έχουν το ίδιο χρώμα.

Πίνακας 13. Πίνακας λογικών δυνατοτήτων της λεπτομερούς ανάλυσης

Δυνατότητα	Κουτί	$1^{η}$ μπάλα	$2^{η}$ μπάλα
1	1	Μικρή μαύρη	Μεγάλη μαύρη
2	1	Μεγάλη μαύρη	Μικρή μαύρη
3	1	Μικρή μαύρη	Άσπρη
4	1	Μεγάλη μαύρη	Άσπρη
5	1	Άσπρη	Μικρή μαύρη
6	1	Άσπρη	Μεγάλη μαύρη
7	2	Μαύρη	Μικρή άσπρη
8	2	Μαύρη	Μεγάλη άσπρη
9	2	Μικρή άσπρη	Μαύρη
10	2	Μεγάλη άσπρη	Μαύρη
11	2	Μικρή άσπρη	Μεγάλη άσπρη
12	2	Μεγάλη άσπρη	Μικρή άσπρη

Έτσι γίνεται αντιληπτό ότι το σύνολο των λογικών δυνατοτήτων ενός προβλήματος μπορεί να προσδιοριστεί ποικιλοτρόπως με βασική προϋπόθεση ότι σε δεδομένη χρονική στιγμή, μια και μόνο μια δυνατότητα βρίσκεται σε ισχύ.
Από τη στιγμή που έχουμε το σύνολο των λογικών δυνατοτήτων του προβλήματος, μπορούμε να κάνουμε δηλώσεις της μορφής

s: "Παίρνουμε δύο μαύρες μπάλες από το $1^{ο}$ κουτί".

Στους πίνακες που ακολουθούν δίνονται οι πίνακες αληθείας της s για την περίπτωση της λεπτομερούς και της συνοπτικής ανάλυσης.

Πίνακας 13. Πίνακας αληθείας της s για τη λεπτομερή ανάλυση

Δυνατότητα	Τιμή αληθείας της s
1	T
2	T
3	F
4	F
5	F
6	F
7	F
8	F
9	F
10	F
11	F
12	F

Πίνακας 15. Πίνακας αληθείας της s για την συνοπτική ανάλυση

Δυνατότητα	Τιμή αληθείας της s
1	T
2	F
3	F
4	F
5	F
6	F

Είναι τώρα προφανές ότι η πρόταση r:"Παίρνουμε πρώτα μια μεγάλη άσπρη μπάλα και μετά μια μικρή άσπρη μπάλα από το $2^{ο}$ κουτί", έχει νόημα μόνο για τη λεπτομερή ανάλυση και αντιστοιχεί στην περίπτωση 12 του πίνακα 13. Συνεπώς κατά τη μελέτη ενός επιστημονικού προβλήματος η ανάλυση των λογικών δυνατοτήτων θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε η τιμή αληθείας μιας πρότασης να μπορεί να προσδιοριστεί για κάθε λογική δυνατότητα. Τέλος είναι προφανές ότι μια πρόταση που έχει νόημα στην απλή ανάλυση έχει νόημα και στη λεπτομερή ανάλυση, ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει.

Οι γραμμές του πίνακα αληθείας μιας πρότασης αποτελούν ένα καλό παράδειγμα των λογικών δυνατοτήτων. Αν υποθέσουμε ότι έχουμε τρεις απλές προτάσεις p, q και r, τότε ο πίνακας αληθείας έχει οκτώ γραμμές και επομένως υπάρχουν οκτώ λογικές δυνατότητες. Κάθε σύνθετη πρόταση s που σχηματίζεται από τις p, q και r γίνεται αναφορικά με τις οκτώ λογικές δυνατότητες. Για παράδειγμα ο πίνακας αληθείας της πρότασης $s:\ p \to (\neg q \vee r)$ είναι

Πίνακας 16. Πίνακας αληθείας της $s:\ p \to (\neg q \vee r)$

Δυνατότητα	Τιμή αληθείας της s
TTT	T
TTF	F
TFT	T
TFF	T
FTT	T
FTF	T
FFT	T
FFF	T

Εντούτοις δεν είναι απαραίτητο σε κάθε πρόβλημα να εμφανίζονται όλοι οι συνδυασμοί των τιμών αληθείας των p, q και r.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 16</u> Στο παράδειγμα 15 με τις μπάλες στα κουτιά και τη συνοπτική ανάλυση, θεωρούμε τις προτάσεις, p: "Επιλέγεται το 1^{ο} κουτί", q: "Η 1^{η} μπάλα είναι άσπρη" και r: "Η 2^{η} μπάλα είναι μαύρη". Δίνονται παρακάτω οι τιμές αληθείας των p, q και r για τις έξι δυνατές περιπτώσεις της απλής ανάλυσης.

Πίνακας 17. Πίνακας αληθείας των p, q και r για την απλή ανάλυση

Δυνατότητα	p	q	r
1	T	F	T
2	T	F	F
3	T	T	T
4	F	F	F
5	F	T	T
6	F	T	F

Παρατηρούμε ότι στον πίνακα 17 οι γραμμές TTF και FFT του πίνακα 16 δεν εμφανίζονται και από τον πίνακα 17 προκύπτει ότι τώρα η $s:\ p \to (\neg q \vee r)$ είναι ταυτολογία.

Πίνακας 18. Πίνακας αληθείας της $s:\ p \to (\neg q \vee r)$

Δυνατότητα	Τιμή αληθείας της s
TTT	T
TFT	T
TFF	T
FTT	T
FTF	T
FFF	T

Παρατηρούμε ότι όταν έχουμε τρεις απλές προτάσεις, ο πίνακας αληθείας της σύνθετης πρότασης αποτελείται από οκτώ γραμμές. Γενικότερα ισχύει ότι αν υπάρχουν n απλές προτάσεις, τότε ο πίνακας αληθείας αποτελείται από 2^n γραμμές.

ΟΡΙΣΜΟΣ 10 Όταν οι n απλές προτάσεις p_1, …, p_n είναι τέτοιες ώστε όλες 2^n γραμμές του πίνακα αληθείας να είναι λογικές δυνατότητες, τότε οι p_1, …, p_n λέγονται λογικά ανεξάρτητες (logically independent).

5. ΛΟΓΙΚΕΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΕΣ

Συχνά στα μαθηματικά χρησιμοποιούνται λογικά επιχειρήματα που είναι η αντικατάσταση μιας δήλωσης με άλλη δήλωση που έχει την ίδια τιμή αληθείας με την αρχική. Έτσι για την κατασκευή μαθηματικών επιχειρημάτων χρησιμοποιούνται μέθοδοι που παράγουν προτάσεις με την ίδια τιμή αληθείας όπως μια δεδομένη σύνθετη πρόταση.

ΟΡΙΣΜΟΣ 11 Μία σύνθετη πρόταση που είναι πάντοτε αληθής, ανεξάρτητα από τις τιμές αληθείας των απλών προτάσεων που την συνθέτουν, ονομάζεται λογικά αληθής (logically true) ή ταυτολογία (tautology).

ΟΡΙΣΜΟΣ 12 Μία σύνθετη πρόταση που είναι πάντοτε ψευδής, ανεξάρτητα από τις τιμές αληθείας των απλών προτάσεων που την συνθέτουν, ονομάζεται λογικά ψευδής (logically false) ή αντίφαση (contradiction).

ΟΡΙΣΜΟΣ 13 Μια σύνθετη πρόταση που δεν είναι ούτε ταυτολογία, ούτε αντίφαση λέγεται ενδεχόμενο (contingency).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 17 Να κατασκευαστεί ο πίνακας αληθείας των $p \wedge \neg p$ και $p \vee \neg p$.

Πίνακας 19. Πίνακας αληθείας παραδείγματος 17

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$	$p \vee \neg p$
T	F	F	T
F	T	F	T

Παρατηρούμε ότι η $p \wedge \neg p$ είναι μια αντίφαση, ενώ η $p \vee \neg p$ είναι ταυτολογία.

Όταν δύο σύνθετες προτάσεις έχουν τις ίδιες τιμές αληθείας σε όλες τις δυνατές περιπτώσεις ονομάζονται λογικά ισοδύναμες.

ΟΡΙΣΜΟΣ 14 Οι προτάσεις p και q είναι λογικά ισοδύναμες όταν η $p \leftrightarrow q$ είναι ταυτολογία και συμβολίζουμε $p \equiv q$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2 Το σύμβολο $\equiv$ δεν είναι λογικό συνδετικό αλλά η δήλωση ότι η $p \leftrightarrow q$ είναι ταυτολογία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 18 Να δειχθεί ότι οι προτάσεις $p \vee (q \wedge r)$ και $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ είναι λογικά ισοδύναμες. Αυτή είναι η επιμεριστική ιδιότητα της διάζευξης ως προς τη σύζευξη.

Πίνακας 20. Πίνακας αληθείας παραδείγματος 18

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F	F	F

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 19 Να δειχθεί ότι οι προτάσεις $p \to q$ και $\neg p \vee q$ είναι λογικά ισοδύναμες.

Πίνακας 21. Πίνακας αληθείας παραδείγματος 19

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \to q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 20 Να δειχθεί ότι οι προτάσεις $\neg(p \vee q)$ και $\neg p \wedge \neg q$ είναι λογικά ισοδύναμες. Η ισοδυναμία αυτή είναι γνωστή σαν κανόνας του De Morgan για την άρνηση της διάζευξης.

Πίνακας 22. Πίνακας αληθείας παραδείγματος 20

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 21</u> Να δειχθεί ότι οι προτάσεις $\neg(p \wedge q)$ και $\neg p \vee \neg q$ είναι λογικά ισοδύναμες. Η ισοδυναμία αυτή είναι γνωστή σαν κανόνας του De Morgan για την άρνηση της σύζευξης.

Πίνακας 23. Πίνακας αληθείας παραδείγματος 21

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

Στον πίνακα 24 που ακολουθεί δίνονται κάποιες σημαντικές ισοδυναμίες, όπου το **T** συμβολίζει την ταυτολογία και το **F** συμβολίζει την αντίφαση

Πίνακας 24. Λογικές ισοδυναμίες

Ισοδυναμία	Κανόνας
$p \wedge \mathbf{T} \equiv p$ $p \vee \mathbf{F} \equiv p$	Ταυτότητας
$p \vee \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$ $p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$	Κυριότητας
$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$	Μοναδιαίος
$\neg(\neg p) \equiv p$	Διπλή άρνηση
$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$	Αντιμετάθεση
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	Προσεταιρισμός
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Επιμερισμός
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	De Morgan

$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$	Αφομοίωση
$p \vee \neg p \equiv \mathbf{T}$ $p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F}$	Άρνηση

Οι κανόνες De Morgan ισχύουν και στην περίπτωση n προτάσεων $p_1, \ldots, p_n$,

$$\neg(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \equiv \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \ldots \wedge p_n$$

και

$$\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \equiv \neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \ldots \vee p_n .$$

Στον πίνακα 25 που ακολουθεί δίνονται λογικές ισοδυναμίες σχετικές με την υποθετική πρόταση.

Πίνακας 25. Λογικές ισοδυναμίες σχετικές με την υποθετική

Ισοδυναμία
$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
$p \rightarrow q \equiv \neg p \rightarrow \neg q$
$p \vee q \equiv \neg p \rightarrow q$
$p \wedge q \equiv \neg(p \rightarrow \neg)q$
$\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$
$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$
$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \vee q) \rightarrow r$
$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \vee r)$
$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$

Στον πίνακα 26 που ακολουθεί δίνονται λογικές ισοδυναμίες σχετικές με την αμφίδρομη υποθετική πρόταση

Πίνακας 26. Λογικές ισοδυναμίες σχετικές με τη αμφίδρομη υποθετική

Ισοδυναμία
$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow) \wedge (q \rightarrow p)$
$p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$
$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$

Οι παραπάνω λογικές ισοδυναμίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την κατασκευή άλλων ισοδυναμιών.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 22</u> Να δειχθεί ότι η πρόταση $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ είναι λογικά ισοδύναμη με την $\neg p \wedge \neg q$.
Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα αληθείας, αλλά αντ' αυτού, θα κάνουμε χρήση των λογικών ισοδυναμιών του πίνακα 24.

$\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \equiv \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q))$ (2^{ος} κανόνας De Morgan)
$\equiv \neg p \wedge [\neg(\neg p \vee \neg q))$ (1^{ος} κανόνας De Morgan)
$\equiv \neg p \wedge (p \vee \neg q)$ (κανόνας διπλής άρνησης)
$\equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ (2^{ος} επιμεριστικός κανόνας)
$\equiv \mathbf{F} \vee (\neg p \wedge \neg q)$ (κανόνας $p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F}$)
$\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee \mathbf{F}$ (κανόνας αντιμετάθεσης)
$\equiv \neg p \wedge \neg q$ (κανόνας ταυτότητας)

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 23</u> Να δειχθεί ότι η πρόταση $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ είναι ταυτολογία.
Χρησιμοποιώντας τις λογικές ισοδυναμίες θα δείξουμε ότι είναι λογικά ισοδύναμη με **T**.
$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) \equiv \neg(p \wedge q) \vee (p \vee q)$ (παράδειγμα 18)
$\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q)$ (1^{ος} κανόνας De Morgan)
$\equiv (\neg p \vee p) \vee (\neg q \vee q)$ (προσεταιριστικός κανόνας)
$\equiv \mathbf{T} \vee \mathbf{T}$ (παράδειγμα 16)
$\equiv \mathbf{T}$ (κανόνας ταυτότητας)

6. ΛΟΓΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

Μέχρι τώρα μελετήθηκαν μεμονωμένες προτάσεις. Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε τη σχέση που μπορεί να υπάρχει μεταξύ δύο προτάσεων. Μια σημαντική σχέση είναι όταν μια πρόταση συνεπάγεται λογικά (logically implies) μια άλλη. Όταν η p συνεπάγεται την q, τότε λέμε ότι η q προκύπτει από την p. Για παράδειγμα σε όλα τα θεωρήματα των μαθηματικών η υπόθεση συνεπάγεται το συμπέρασμα.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ 15</u> Αν p, q είναι προτάσεις, τότε λέμε ότι η πρόταση "η p συνεπάγεται την q" αν η q είναι αληθής κάθε φορά που η p είναι αληθής, δηλαδή, η q είναι αληθής σε όλες τις λογικές δυνατότητες που η p είναι αληθής.

Για σύνθετες προτάσεις που αποτελούνται από τις ίδιες επιμέρους απλές προτάσεις, η συνεπαγωγή μπορεί να διαπιστωθεί από τους πίνακες αληθείας.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 24</u> Από τον πίνακα αληθείας 27,

Πίνακας 27. Πίνακας αληθείας παραδείγματος 24

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \to q$	$p \vee q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	F	T	T
F	F	T	T	F

παρατηρούμε ότι η $p \leftrightarrow q$ είναι αληθής στην 1^{η} και 4^{η} γραμμή. Επειδή η $p \to q$ είναι επίσης αληθής σ' αυτές τις γραμμές λέμε ότι η δήλωση $p \leftrightarrow q$ συνεπάγεται την $p \to q$. Αντιθέτως επειδή η δήλωση $p \vee q$ είναι ψευδής στην 4^{η} γραμμή δεν ισχύει ότι $p \vee q$ προκύπτει λογικά από την $p \leftrightarrow q$. Επίσης από τον πίνακα 27 προκύπτει ότι η $p \to q$ δεν συνεπάγεται την $p \vee q$ ούτε προκύπτει λογικά από αυτή.

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3</u> Η σχέση της συνεπαγωγής είναι στενά συνδεδεμένη με την υποθετική πρόταση αλλά δεν θα πρέπει να τις συγχέουμε μεταξύ τους. Η υποθετική πρόταση είναι μία <u>νέα σύνθετη πρόταση</u> που προκύπτει από τις επιμέρους απλές προτάσεις, ενώ η συνεπαγωγή είναι μία <u>σχέση</u> μεταξύ των επιμέρους απλών προτάσεων.

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 4</u> Η σχέση που συνδέει τη συνεπαγωγή και την υποθετική πρόταση είναι η εξής: "Η p συνεπάγεται την q τότε και μόνο τότε όταν η $p \to q$ είναι ταυτολογία.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ 16</u> Δύο προτάσεις p και q λέγονται <u>ασυνεπείς</u> (inconsistent) όταν γνωρίζοντας ότι η μια είναι αληθής, είμαστε βέβαιοι ότι η άλλη είναι ψευδής.

Συνεπώς όταν p και q είναι ασυνεπείς είναι αδύνατο να είναι και οι δύο μαζί αληθείς. Γενικότερα οι n απλές προτάσεις p_1, …, p_n είναι ασυνεπείς όταν είναι αδύνατο να είναι όλες μαζί αληθείς.

7. ΕΓΚΥΡΑ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΑ

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε τρόπους ελέγχου της εγκυρότητας των λογικών επιχειρημάτων.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ 17</u> Ένα λογικό <u>επιχείρημα</u> (argument) είναι ένας ισχυρισμός (assertion) ότι μια συγκεκριμένη πρόταση (το συμπέρασμα) προκύπτει λογικά από άλλες προτάσεις (τις προϋποθέσεις).

ΟΡΙΣΜΟΣ 18 Ένα λογικό επιχείρημα λέγεται έγκυρο (valid) αν και μόνο αν η σύζευξη των προϋποθέσεων συνεπάγεται το συμπέρασμα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 5 Η αλήθεια του συμπεράσματος δεν έχει σχέση με την λογική εγκυρότητα του επιχειρήματος. Ένα αληθές συμπέρασμα δεν είναι ούτε αναγκαίο, ούτε ικανό για την εγκυρότητα του επιχειρήματος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 25 Θεωρούμε το λογικό επιχείρημα

Αν στην Ελλάδα υπάρχει δημοκρατία, τότε οι πολίτες έχουν δικαίωμα ψήφου. Στην Ελλάδα οι πολίτες έχουν δικαίωμα ψήφου.
Συνεπώς στην Ελλάδα υπάρχει δημοκρατία.

Εδώ το συμπέρασμα είναι αληθές. Εντούτοις επιχείρημα δεν είναι έγκυρο διότι το συμπέρασμα δεν προκύπτει από τις προϋποθέσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 26 Θεωρούμε το λογικό επιχείρημα

Στη Δημοκρατία ο αρχηγός του κράτους εκλέγεται από το λαό. Στην Ελλάδα ο Πρόεδρος της Δημοκρατίας είναι ο αρχηγός του κράτους. Ο Έλληνας αρχηγός του κράτους δεν εκλέγεται από το λαό.
Συνεπώς στην Ελλάδα δεν υπάρχει Δημοκρατία.

Εδώ το συμπέρασμα είναι ψευδές, αλλά το επιχείρημα είναι έγκυρο αφού το συμπέρασμα προκύπτει από τις προϋποθέσεις.

Αν το επιχείρημα είναι έγκυρο τότε η σύζευξη των προϋποθέσεων συνεπάγεται το συμπέρασμα. Συνεπώς αν όλες οι προϋποθέσεις είναι αληθείς, τότε το συμπέρασμα είναι επίσης αληθές. Εντούτοις αν κάποια από τις προϋποθέσεις είναι ψευδής, έτσι ώστε η σύζευξη όλων των προϋποθέσεων να είναι ψευδής, τότε το συμπέρασμα μπορεί να είναι είτε αληθές είτε ψευδές. Υπάρχει δηλαδή η περίπτωση, όλες οι προϋποθέσεις μπορεί να είναι ψευδείς, το συμπέρασμα να είναι αληθές και το επιχείρημα να είναι έγκυρο, όπως προκύπτει από το παράδειγμα που ακολουθεί

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 27 Θεωρούμε το λογικό επιχείρημα

Όλοι οι σκύλοι έχουν δύο πόδια Όλα τα δίποδα όντα είναι σαρκοβόρα.
Συνεπώς, όλοι οι σκύλοι είναι σαρκοβόρα όντα.

Εδώ και οι δύο υποθέσεις είναι ψευδείς, το συμπέρασμα είναι αληθές και το επιχείρημα είναι έγκυρο.

ΟΡΙΣΜΟΣ 19 Ένας επιχείρημα που περιέχει δύο υποθέσεις και ένα συμπέρασμα λέγεται συλλογισμός (reasoning). Η πρώτη υπόθεση λέγεται πρωτεύων συλλογισμός και η δεύτερη δευτερεύων συλλογισμός.

Δίνονται παρακάτω δύο έγκυρα επιχειρήματα, που αποτελούν τους δημοφιλέστερους τύπους συλλογισμού στη λογική, όπου το σύμβολο "$\therefore$" σημαίνει "συνεπώς" ή "επομένως".

Πίνακας 28. Δύο έγκυροι τύποι συλλογισμού

Modus Ponens	Modus Tollens
$p \to q$ p	$p \to q$ $\neg q$
$\therefore q$	$\therefore \neg p$

Στα λατινικά ο όρος Modus Ponens σημαίνει "ο τρόπος του θέτειν", ενώ ο όρος Modus Tollens σημαίνει " ο τρόπος του αναιρείν". Προκειμένου να αποδείξουμε ότι οι συλλογισμοί αυτοί είναι έγκυροι, δίνουμε παρακάτω τους πίνακες αληθείας των.

Πίνακας 29. Πίνακας αληθείας Modus Ponens

p	q	$p \to q$	p	q
T	T	**T**	**T**	**T**
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	F	T	F	F

Από τον πίνακα 29 προκύπτει ότι υπάρχει μια μόνο περίπτωση (η πρώτη) όπου και οι δύο προϋποθέσεις είναι αληθείς και οδηγούν σε αληθές συμπέρασμα. Συνεπώς ο συλλογισμός είναι έγκυρος.

Πίνακας 30. Πίνακας αληθείας Modus Tollens

p	q	$p \to q$	$\neg q$	$\neg p$
T	T	T	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	F	**T**	**T**	**T**

Ομοίως από τον πίνακα 30 προκύπτει ότι υπάρχει μια μόνο περίπτωση (η τέταρτη) όπου και οι δύο προϋποθέσεις είναι αληθείς και οδηγούν σε αληθές συμπέρασμα. Συνεπώς ο συλλογισμός είναι έγκυρος.

Ένας έγκυρος συλλογισμός λέγεται και "κανόνας εξαγωγής συμπερασμάτων". Έτσι τόσο ο Modus Ponens, όσο και ο Modus Tollens αποτελούν κανόνες εξαγωγής συμπερασμάτων. Δίνονται παρακάτω μερικοί κανόνες εξαγωγής λογικών συμπερασμάτων.

Πίνακας 30. Κανόνες εξαγωγής συμπερασμάτων

Κανόνας	Ταυτολογία	Όνομα
$p \to q$ p $\therefore q$	$[p \wedge (p \to q)] \to q$	Modus Ponens
$p \to q$ $\neg q$ $\therefore \neg p$	$[\neg q \wedge (p \to q)] \to \neg p$	Modus Tollens
$p \to q$ $q \to r$ $\therefore p \to r$	$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$	Υποθετικός συλλογισμός
$p \vee q$ $\neg p$ $\therefore q$	$[(p \vee q) \wedge \neg p] \to q$	Διαζευκτικός συλλογισμός
$p \vee q$ $\neg p \vee r$ $\therefore q \vee r$	$[(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)] \to (p \vee r)$	Διαχωρισμός

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 28 Δίνεται το λογικό επιχείρημα, "Αν βρέξει σήμερα, τότε δεν θα πάμε εκδρομή σήμερα. Αν δεν πάμε εκδρομή σήμερα, τότε θα πάμε εκδρομή αύριο. Συνεπώς αν βρέξει σήμερα, τότε θα πάμε εκδρομή αύριο".
Βάζουμε p: "Σήμερα βρέχει", q: "Δεν θα πάμε εκδρομή σήμερα" και r: "Θα πάμε εκδρομή αύριο". Τότε έχουμε

$$\begin{array}{r} p \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore p \to r \end{array}$$

Αυτός είναι ο υποθετικός συλλογισμός, ο πίνακας αληθείας του οποίου είναι

Πίνακας 30. Πίνακας αληθείας υποθετικού συλλογισμού

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$p \to r$
T	T	T	**T**	**T**	**T**
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	T	**T**	**T**	**T**

F	T	F	T	F	T
F	F	T	**T**	**T**	**T**
F	F	F	**T**	**T**	**T**

Από τον πίνακα 30 παρατηρούμε ότι και οι δύο προϋποθέσεις είναι αληθείς στην $1^η$, $5^η$, $7^η$ και $8^η$ γραμμή. Επειδή σ' αυτές τις γραμμές το συμπέρασμα είναι επίσης αληθές το επιχείρημα είναι έγκυρο.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ 20</u> Ένας συλλογισμός που δεν είναι έγκυρος λέγεται λογική <u>πλάνη</u> (fallacy).

Οι παρακάτω συλλογισμοί είναι λογικές πλάνες

$p \to q$ q	$p \to q$ $\neg p$
$\therefore p$	$\therefore \neg q$

Στην πρώτη πλάνη και οι δύο προϋποθέσεις είναι αληθείς στην $1^η$ και $3^η$ γραμμή του πίνακα 31, αλλά το συμπέρασμα είναι ψευδές στην $3^η$ γραμμή.

Πίνακας 31. Πίνακας αληθείας πρώτης πλάνης

p	q	$p \to q$	q	p
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	**T**	**T**	**F**
F	F	T	F	F

Ομοίως στην δεύτερη πλάνη και οι δύο προϋποθέσεις είναι αληθείς στην $3^η$ και $4^η$ γραμμή του πίνακα 32, αλλά το συμπέρασμα είναι ψευδές στην $3^η$ γραμμή.

Πίνακας 32. Πίνακας αληθείας δεύτερης πλάνης

p	q	$p \to q$	$\neg p$	$\neg q$
T	T	T	F	F
T	F	F	F	T
F	T	**T**	**T**	**F**
F	F	T	T	T